Développements limités

cours MIP

Soumia CHAIRA et Mohamed MALIKI

F.S.T. Mohammedia Université Hassan II

22nd March 2011

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Notion de développement limité

Définition

Soit $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$.
On dit que f possède un développement limité d'ordre n en 0 (en abrégé un DL_0), s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon :]-a, a[\to \mathbf{R}$ tels que :

1. $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
2. $\forall x \in]-a, a[\quad f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$.

$P_n(x)$ s'appelle la partie régulière ou partie principale du développement limité.

Parfois on note $x^n \varepsilon(x) = \theta(x^n)$ (notation de Landau).

Notion de développement limité

Définition

Soit $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$.
On dit que f possède un développement limité d'ordre n en 0 (en abrégé un DL_0), s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon :]-a, a[\to \mathbf{R}$ tels que :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
2. $\forall x \in]-a, a[\quad f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x).$

$P_n(x)$ s'appelle la partie régulière ou partie principale du développement limité.

Parfois on note $x^n \varepsilon(x) = \theta(x^n)$ (notation de Landau).

Notion de développement limité

Définition

Soit $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$.
On dit que f possède un développement limité d'ordre n en 0 (en abrégé un DL_0), s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon :]-a, a[\to \mathbf{R}$ tels que :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$
2. $\forall x \in]-a, a[\quad f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x).$

$P_n(x)$ s'appelle la partie régulière ou partie principale du développement limité.

Parfois on note $x^n \varepsilon(x) = \theta(x^n)$ (notation de Landau).

Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ d'ordre n en 0 :

Exemple

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
$$= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$
$$= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\frac{x}{1-x}$$
$$= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ d'ordre n en 0 :

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\frac{x}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ d'ordre n en 0 :

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\frac{x}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ d'ordre n en 0 :

Exemple

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\
&= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\
&= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x} \\
&= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Troncature d'un développement limité

Proposition

Supposons que f admet un DL d'ordre n en 0. Soit $p \leq n$. Alors f admet un DL d'ordre p en 0, obtenu par troncature. Plus précisément :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + x^p \varepsilon(x).$$

avec

$$\varepsilon(x) = a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \cdots + a_p x^{n-p}.$$

Par exemple, si $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^4 + x^4 \varepsilon(x)$, alors $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^3 \varepsilon(x)$.

Unicité du développement limité

Proposition

Le développement limité d'ordre n d'une fonction f ,s'il existe, est unique.

Développement limité et parité

Proposition

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie principale $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

- *Si f est paire alors les coefficients a_{2k+1} sont nuls :*

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + \cdots$$

- *Si f est impaire alors les coefficients a_{2k} sont nuls :*

$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots$$

Développement limité et parité

Proposition

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie principale $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

- *Si f est paire alors les coefficients a_{2k+1} sont nuls :*

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + \cdots$$

- *Si f est impaire alors les coefficients a_{2k} sont nuls :*

$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots$$

DL et continuité, DL et dérivabilité

Proposition

- *Pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre* 0 *en* 0, *il faut et il suffit que* f *soit continue en* 0. *On a alors dans un voisinage de* 0,

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x)$$

- *Pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre* 1 *en* 0, *il faut et il suffit que* f *soit dérivable en* 0. *On a alors dans un voisinage de* 0,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$

DL et continuité, DL et dérivabilité

Proposition

- *Pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre* 0 *en* 0, *il faut et il suffit que* f *soit continue en* 0. *On a alors dans un voisinage de* 0,

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x)$$

- *Pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre* 1 *en* 0, *il faut et il suffit que* f *soit dérivable en* 0. *On a alors dans un voisinage de* 0,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$

ATTENTION : Un Développement limité d'ordre $n \geq 2$ en 0 n'implique pas que f soit deux fois dérivable en 0.
(Exemple : $x \longrightarrow x^3 sin\frac{1}{x}$)

Une condition suffisante pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre $n \geq 2$ est qu'elle soit n-fois dérivable.
Ce résultat est donné par le théorème de Taylor-Young, qui est également l'outil de base pour calculer un développement limité.

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soient f une fonction de classe $C^n([a,b])$ et $x_0 \in [a,b]$.
Alors il existe une fonction ε définie sur $[a,b]$ vérifiant :

$\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ *et*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

Corollaire

Une fonction f de classe C^n sur un voisinage de 0 admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Développements limités usuels

Tous les développements limités ci-dessous sont valables à l'origine, et peuvent être obtenus par la formule de Taylor-Young.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} shx &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} chx &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha =$$
$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Combinaisons linéaires

Proposition

Soient f et g deux fonctions ayant deux DL d'ordre n en 0 de parties principales respectives P et Q. Alors, pour tous réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie principale $\alpha P + \beta Q$.

Exemple

$$\begin{aligned} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x)) \\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Produit de deux DL

Proposition

Soient f et g ayant deux développements limités d'ordre n en 0 dont les parties principales respectives P et Q.
Alors $f \times g$ admet un DL à l'ordre n en 0 dont la partie principale est formée de termes de degré inférieur ou égal à n du produit $P \times Q$.

Exemple

On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$

et $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x).$

On en déduit : $\frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x).$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Quotient de deux DL

Proposition

Si $g(0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en 0 dont la partie principale s'obtient par la division suivant les puissances croissantes de P par Q jusqu'à l'ordre n.

Exemple

On a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$

et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$

On en déduit : $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$.

ATTENTION : Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ peut admettre un $DL_n(0)$ mais celui-ci ne peut pas être calculé par division selon les puissances croissantes qui est non définie.

Exemple : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ admet un $DL_3(0)$:

$$1 - \frac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Composition de deux DL

Proposition

Soient $t \to f(t)$ et $x \to g(x)$ sont deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n en 0 de parties principales $P(t)$ et $Q(x)$.

Si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ alors la composée $x \to f \circ g(x)$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie principale s'obtient en remplaçant t dans $P(t)$ par $Q(x)$ et en ne conservant que les monômes de degré $\leq n$.

Exemple

- Calculons le DL de $\ln(1+\sin x)$ d'ordre 4 en 0 :

  $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x), \quad \sin(0) = 0$$

  $$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4\varepsilon(t).$$

  On remplace t par $x - \frac{x^3}{3!}$, on obtient :

  $$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x).$$

Exemple

- Calculons le DL de $e^{1/1-x}$ à l'ordre 2 en 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \qquad g(0) = 1 \neq 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned} e^{1/1-x} &= e^{1+x+x^2+x^2\varepsilon(x)} \\ &= e.e^{e^{x+x^2+x^2\varepsilon(x)}} \\ e^{1/1-x} &= e\left(1 + (x+x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + x^2\varepsilon(x)\right) \\ &= e(1 + x + \frac{3}{2}x^2) + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

DL obtenu par dérivation

Corollaire

Soit f une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de 0. Alors le développement limité d'ordre n en 0 de f' s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité d'ordre $n+1$ en 0 de f.

Exemple

Ce résultat est utilisé pour des applications de classe C^∞.
On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x).$$

Par dérivation, on en déduit :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Une nouvelle dérivation donne :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

DL obtenu par primitivation

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Si f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie principale P, alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 dont la partie principale est la primitive de P qui vaut $f(0)$ en 0.

Autrement dit f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 de la forme :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\,dt + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

Exemple

Ce résultat permet d'obtenir certains développements limités d'ordre n en 0.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Etablir le $DL_6(0)$ de $\arctan x$ et $\arccos x$.

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Développement limité au voisinage d'un point non nul

Définition

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en $x_0 \in \mathbf{R}^*$ si la fonction $\varphi : t \mapsto f(x_0 + t)$ admet un $DL_n(0)$.
Le DL_n au voisinage de x_0 de f est alors donné par :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

- le polynôme P de degré $\leq n$ est la partie principale du $DL_n(0)$ de la fonction φ ;
- l'application ε définie au voisinage de x_0 vérifie

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple

- Calcul du $DL_3(\frac{\pi}{2})$ de $f(x) = \dfrac{e^{1+x}}{\cos x}$:

  On pose $X = x - \dfrac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \varphi(X) = \frac{e^{1+X+\frac{\pi}{2}}}{-\sin X} = -e^{1+\frac{\pi}{2}} \frac{e^X}{\sin X}.$$

ATTENTION : On exprime toujours la partie principale du développement limité d'ordre n en x_0 suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et non pas suivant celles de x.

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Développement limité au voisinage de l'infini

Définition

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. au voisinage de $-\infty$) si la fonction $\varphi : t \mapsto f(\frac{1}{t})$ admet un DL d'ordre n à droite en 0 (resp. à gauche en 0).

Développement limité au voisinage de l'infini

Définition

Le DL d'ordre au voisinage de $+\infty$ (resp. au voisinage de $-\infty$) de f est alors donné par :

$$f(x) = P(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

- le polynôme P de degré $\leq n$ est la partie principale du DL d'ordre n à droite en 0 (resp. à gauche en 0) de φ ;
- l'application ε définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0 \quad (resp. \lim\limits_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0)$.

Exemple

- Calcul du $DL_4(+\infty)$ de $f(x) = e^{1/x}$:

  On pose $X = \dfrac{1}{x}$.

$$f(x) = \varphi(X) = e^X.$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Développement limité généralisé

Définition

On suppose que f n'admet pas de $DL_n(0)$. On dit que f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de 0 si et seulement si il existe $p \geq 1$ tel que $x^p f(x)$ admet un $DL_n(0)$:

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

D'où

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \cdots + a_p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)$$

Exemple

- Calcul du DL généralisé de $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$:
  1. f n'admet pas de $DL_n(0)$, car $\lim\limits_0 f(x) = \infty$.
  2. $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)} \Rightarrow xf(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$
     D'où

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Recherche d'équivalents

Proposition

Si f admet un $DL_n(x_0)$ de partie principale $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$,

alors f est équivalente au premier terme non nul de P :

$$f(x) \sim_{x_0} a_r (x - x_0)^r .$$

Exemple

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \sim_0 \frac{x}{6}.$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Calcul de limites

Les développements limités fournissent un outil puissant pour le calcul des limites.

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}.$$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Position par rapport à une tangente

Proposition

On suppose que f admet un DL d'ordre $n \geq 3$ en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

L'équation de la tangente Δ à la courbe C_f en x_0 est

$$y = a_0 + a_1(x - x_0).$$

Soit m l'indice minimum tel que $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$. Alors

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim_{x_0} a_m(x - x_0)^m.$$

Position par rapport à une tangente

Proposition

- *Si m est pair, la position locale de C_f par rapport à Δ est donné par le signe de a_m :*
  Si $a_m > 0$, la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.
  Si $a_m < 0$, la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.

- *Si m est impair, la courbe C_f "traverse" Δ au voisinage de M_0. Δ est donc une tangente d'inflexion.*

Position par rapport à une tangente

Proposition

- *Si m est pair, la position locale de C_f par rapport à Δ est donné par le signe de a_m :*
  Si $a_m > 0$, la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.
  Si $a_m < 0$, la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.

- *Si m est impair, la courbe C_f "traverse" Δ au voisinage de M_0. Δ est donc une tangente d'inflexion.*

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Position par rapport à une asymptote

Proposition

On suppose qu' au voisinage de $\pm\infty$ on a le développement :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x^n})$$

On en déduit que la droite Δ d'équation $y = a_0x + a_1$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$.
Soit m l'indice minimum tel que $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$. Alors

$$f(x) - a_0x - a_1 \sim_{\pm\infty} \frac{a_m}{x^{m-1}}.$$

On en déduit la position de la courbe C_f par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$

Plan

1. Notion et premières propriétés du développement limité
   - Notion de développement limité
   - Premières propriétés
   - Développements limités usuels
2. Opérations sur les développements limités
   - Combinaisons linéaires
   - Produit de deux DL
   - Quotient de deux DL
   - Composition de deux DL
   - DL obtenu par dérivation
   - DL obtenu par primitivation
3. Extensions de la notion de développement limité
   - Développement limité au voisinage d'un point non nul
   - Développement limité au voisinage de l'infini

Recherche des extrêmas

Proposition

On suppose que f admet un $DL_n(x_0)$:
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$

- *Si $a_1 \neq 0$ alors $(x_0, f(x_0))$ n' est pas un extrémum.*
- *Si $a_1 = 0$ alors $f(x) - a_0 \sim a_m(x - x_0)^m$ $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$*
  - *Si m est pair,*
    - *$a_m > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ est un minimum ;*
    - *$a_m < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ est un maximum.*
  - *Si m est impair, $(x_0, f(x_0))$ n'est pas un extrémum (C_f traverse la tangente).*